# Chapitre 4

# Conducteur en équilibre

## I. Introduction

Un conducteur est un corps contenant des **porteurs de charges libres**, des particules chargées susceptibles de prendre un **mouvement d'ensemble** sous l'effet de **forces électrostatiques**. Ces porteurs de charges sont des ***électrons*** dans le cas des *métaux* et des ***ions*** dans le cas des *électrolytes* ou *plasma*.

Un conducteur est en **équilibre électrostatique** lorsque les porteurs de charges libres qu'il contient n'ont **aucun mouvement d'ensemble**. Ainsi aucun courant macroscopique n'existe à l'intérieur de ce conducteur.

À l'intérieur d'un système isolé constitué par plusieurs conducteurs, des déplacements de charges peuvent s'opérer par :

- frottement de corps non chargés préalablement,
- contact de deux corps, si l'un des deux corps ou les deux sont chargés initialement,
- l'influence de corps chargés sur un corps isolé placé en leur voisinage.

**Énoncé de la loi**

Dans un système isolé, la charge électrique se conserve :

$$\Sigma q = 0$$

Par exemple, un atome non ionisé se comporte comme une particule électriquement neutre.

**Corps conducteurs et corps isolants**

Un corps quelconque, isolé, contient un certain nombre de porteurs de charges : ce sont les protons liés aux noyaux des atomes et les électrons qui gravitent autour des noyaux.
Lorsque certains électrons sont « libres », c'est-à-dire très faiblement liés à leurs atomes d'origine, ils constituent un « gaz d'électrons » susceptible de se déplacer sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'acquérir une vitesse moyenne :

$$<\vec{v}>=\mu\vec{E}$$

où $\mu$ est la mobilité des porteurs libres. Ainsi, dans les métaux, on admet qu'en moyenne un électron se trouve libéré pour chaque atome, le nombre d'atomes par cm3 étant de l'ordre de $10^{23}$.
Les isolants ou diélectriques peuvent être définis grossièrement comme des corps ne possédant pratiquement pas de charges libres. Il en résulte une conductivité très faible, ce qui correspond à une résistance très élevée.

## II. Propriétés des conducteurs en équilibre électrostatique

### II.1. Champ électrostatique

Le fait que les porteurs de charges libres sont <u>immobiles</u> implique que le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nécessairement **nul.**

***Dans un conducteur en équilibre électrostatique, le vecteur champ est uniformément <u>nul</u>***

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$$

### II.2. Potentiel électrique

En tout point intérieur au conducteur en équilibre nous avons : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = \vec{0}$ *, on déduit :*

***Le potentiel V est <u>uniforme</u> dans tout le volume de la matière conductrice, y compris sur la surface du conducteur*** $V = Cte$

*<u>Remarque :</u> La surface d'un conducteur en équilibre électrostatique est alors une surface équipotentielle. Par conséquent le champ est* ***orthogonal*** *à cette surface.*

### II.3. Charge volumique

Considérons une petite surface fermée intérieure à la matière conductrice, délimitant un petit volume $d\tau$. D'après le Théorème de Gauss, le flux du champ sortant de cette surface est $\frac{\rho d\tau}{\varepsilon_0}$, or le champ est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique, on en déduit que :

***La charge volumique est nulle en tout point d'un conducteur en équilibre électrostatique,***

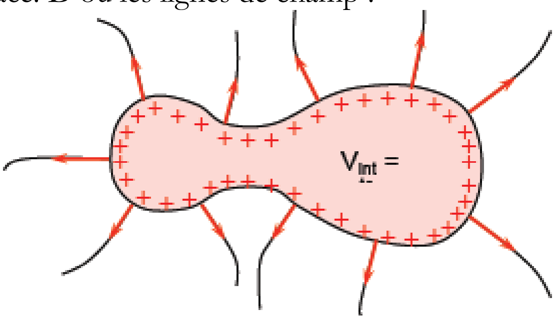
$$\rho_{\text{int}} = 0$$

*<u>Remarque :</u> L'électrisation d'un conducteur en équilibre électrostatique ne peut être que* ***superficielle****.*

### II.4. Lignes de champ

Dans un conducteur, même chargé, le champ électrique à l'intérieur $\vec{E}_{\text{int}}$ est nul.
La surface est au même potentiel qu'à l'intérieur ➔ $V_{surf} = V_{\text{int}}$

Au voisinage de la surface, les équipotentielles sont parallèles à la surface : $\vec{E}_{ext}$ est perpendiculaire à la surface. D'où les lignes de champ :



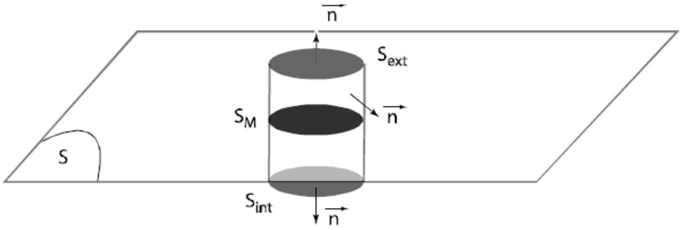

**Remarque :**
Aucune ligne de champ ne peut revenir sur le conducteur. En effet, la circulation du champ de cette ligne impose :

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl}$$

Si les points A et B appartiennent à la surface du conducteur, on $V(A) = V(B)$ alors que l'intégrale (la circulation le long d'une ligne) n'est pas nulle.

### III. Champ au voisinage d'un conducteur

En un point $M$ infiniment voisin de la surface $S$ d'un conducteur, le champ électrique $\vec{E}$ est normal à $S$. Considérons une petite surface $S_{ext}$ parallèle à la surface $S$ du conducteur. On peut ensuite construire une surface fermée $\sum$ en y adjoignant une surface rentrant à l'intérieur du conducteur $S_{\text{int}}$ ainsi qu'une surface latérale $S_L$ . En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, on obtient




$$\phi_\Sigma(\vec{E}) = \oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \iint_{S_L} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{S_{\text{int}}} \vec{E}.d\vec{S} + \iint_{S_{ext}} \vec{E}.d\vec{S} = E.S_{ext} = \frac{\sigma..S_M}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\vec{n}$$

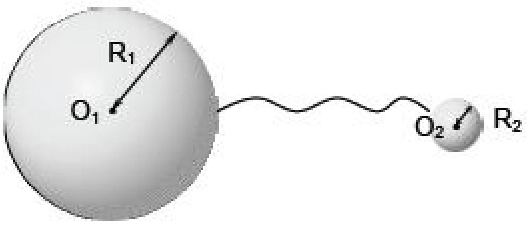
***<u>Théorème de Coulomb :</u>*** Le champ électrique à proximité immédiat d'un conducteur de densité surfacique σ vaut

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\vec{n}$$

$\vec{n}$ étant un vecteur unitaire normal au conducteur et dirigé vers l'extérieur.

## IV. Pouvoir des pointes

Nous allons montrer qu'à proximité d'une pointe, le champ électrique est très intense.
Considérons deux sphères conductrices de rayons respectifs $R_1$ et $R_2$ portées au même potentiel (reliées par un fil conducteur). Les deux sphères ont une densité de charge uniforme $\sigma_1$ et $\sigma_2$.




$$V(O_1) = V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S_1}\frac{\sigma_1 dS}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}$$

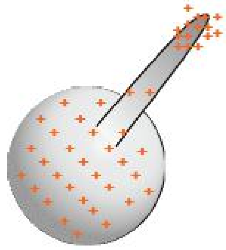
$$V(O_2) = V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S_2}\frac{\sigma_2 dS}{R_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2} = \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}$$

Puisque $V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$

À potentiel égal, la densité de charges d'un conducteur chargé est plus importante sur la surface ayant une courbure forte (petit rayon) que sur la surface ayant une courbure faible (grand rayon)

**Conséquence :**

On observe une accumulation de charges sur l'extrémité de la pointe.

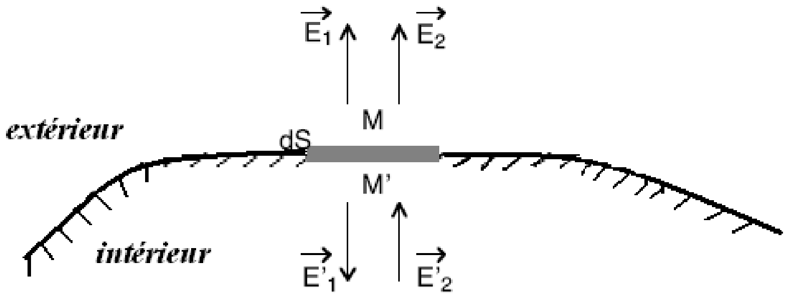


**Applications :**
- paratonnerres de Franklin
- canon à effet de champ des microscopes électroniques

## V. Pression électrostatique

Soient deux points *M* et *M' infiniment* proches de la surface d'un conducteur de densité surfacique σ, M situé à l'extérieur tandis que M' est situé à l'intérieur.

Considérons une surface élémentaire *dS* située entre ces deux points. Soit $\vec{E}_1$ le champ créé en M par les charges situées sur *dS* et $\vec{E}_2$ le champ créé en M par toutes les autres charges situées ailleurs que sur *dS*. Soient $\vec{E}'_1$ et $\vec{E}'_2$ les champs respectifs en M'.




On a alors les trois propriétés suivantes

- $\vec{E}_2(M) = \vec{E}'_2(M')$ car M et M'sont infiniment proches.
- $\vec{E}'_1(M') = -\vec{E}'_2(M')$ car le champ électrique à l'intérieur du conducteur est nul.
- $\vec{E}_1(M) = -\vec{E}'_1(M')$ car M et $M_1$ sont symétrique par rapport à *dS*, considérée comme un plan puisque M et M' peuvent être infiniment rapprochés.

Grâce à ces trois propriétés, on en déduit que $\vec{E}_2 = \vec{E}_1$ c'est à dire que la contribution de l'ensemble du conducteur est égale à celle de la charge située à proximité immédiate.

Le théorème de Coulomb permet d'écrire $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ on en déduit que le champ créé par l'ensemble du conducteur (à l'exclusion des charges situées en *dS*) au voisinage du point M

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}\vec{n}$$

La force électrostatique que subit la charge $dq = \sigma dS$ des autres charges du conducteur est

$$d\vec{F} = dq\vec{E}_2 = \sigma dS \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

$$d\vec{F} = \frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

Cette propriété est caractéristique d'une pression, force par unité de surface. Ainsi, **la pression électrostatique** subie en tout point d'un conducteur vaut

$$P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

## VI. Capacité d'un conducteur isolé

Soit un conducteur à **l'équilibre électrostatique isolé** dans l'espace, chargé avec une distribution surfacique **σ** et porté au potentiel **V**.

En tout point M du conducteur, le potentiel s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{surface} \frac{\sigma(P)dS}{PM}$$

P étant un point quelconque de la surface.
Le potentiel *V* est **proportionnel** à la charge *Q* du conducteur, en effet quand la charge *Q* devient $\lambda.Q$ (c-à-d $\lambda.\sigma$) alors le potentiel et est multiplié aussi par $\lambda$. Tout état d'équilibre d'un conducteur isolé (caractérisé par *Q* et *V*) est tel que le rapport ***Q/V*** **reste constant**

**On pose :** $C = \frac{Q}{V}$ ,

C est la **capacité propre du conducteur**, elle s'exprime en ***Farad*** *(F).*
***Remarque :*** *La capacité d'un conducteur est une grandeur* *<u>toujours positive</u>* *(C>0). Elle dépend de la géométrie de la surface et de la matière du conducteur.*

**Exemple : Capacité d'une sphère métallique isolé**
Si la sphère porte une charge Q, on sait que son potentiel est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

*Application numérique :*

- Pour une sphère de rayon $1m$ : $0.11\,10^{-9}F$ soit $0.11\ nF$
- Pour la terre $6400\,km$ : $C = \frac{6400\,10^3}{9\,10^9} \approx 0.7\,10^{-3}F$ soit $0.7\ mF$

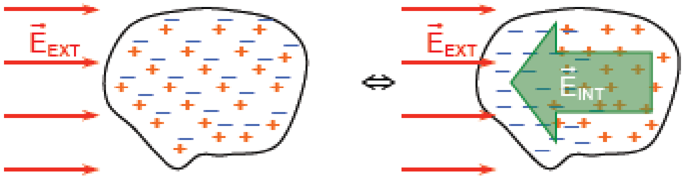
**Remarque :**
On voit sur ces exemples que le Farad est unité trop grande pour mesurer la capacité usuelle. On utilise les sous multiples : microFarad $1\mu F = 10^{-6}F$ , nanoFarad $1nF = 10^{-9}F$ , et picoFarad $1pF = 10^{-12}F$ .

## VII. Système de conducteur en équilibre

### VII.1. Phénomène d'influence électrostatique

Jusqu'à présent nous n'avons abordé que les conducteurs chargés, isolés dans l'espace. En fait, l'équilibre d'un conducteur dépend de toutes les charges qui l'entourent.
Que se passe-t-il lorsque, par exemple, on place un conducteur neutre dans un champ électrique uniforme ?
Etant neutre, sa charge $Q = \iint_{surface} \sigma\ dS$ doit rester nulle. Mais étant un conducteur, les charges sont libres de se déplacer : on va donc assister à un déplacement de charges positives dans la direction

de $\vec{E}$ et de charges négatives dans la direction opposée. On obtient alors une **polarisation** du conducteur (création de pôles + et -), se traduisant par une distribution surfacique $\sigma$ non-uniforme (mais telle que Q=0).




Dans le conducteur à l'équilibre, il apparaît un champ électrique induit par ce déplacement de charges :

⇨ le champ électrique interne $\vec{E}_{\text{int}}$ tel que :

$$\vec{E}_{\text{int}} + \vec{E}_{ext} = \vec{0}$$

Le champ est donc nul à l'intérieur du conducteur à l'équilibre.

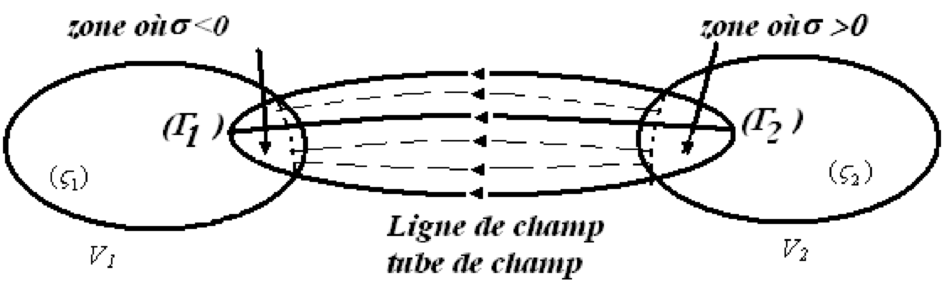
Macroscopiquement, on observe une densité de charges surfacique :
***La présence d'un conducteur dans une région où règne un champ électrique induit une perturbation locale de ce champ.***

Considérons maintenant le cas plus compliqué d'un conducteur (A1) de charge $Q_1$ avec une densité surfacique $\sigma_1$, placé à proximité d'un conducteur neutre (A2). En vertu de ce qui a été dit précédemment, on voit apparaître une densité surfacique $\sigma_2$ non-uniforme sur (A2) due au champ électrique de (A1). Mais, en retour, la présence de charges $\sigma_2$ situées à proximité de (A1) modifie la distribution de charges $\sigma_1$ !
A l'équilibre électrostatique, les deux distributions de charges $\sigma_1$ et $\sigma_2$ dépendent l'une de l'autre. On appelle cette action réciproque, **l'influence électrostatique**.

Dans cet exemple, **l'influence est dite partielle**, car l'ensemble des lignes de champ électrique issues de (A1) n'aboutissent pas sur (A2).

### VII.2. Théorème des éléments correspondants

Considérons deux conducteurs $(\varsigma_1)$ et $(\varsigma_2)$ portés aux potentiels $V_1$ et $V_2$ *(tq. $V_1 < V_2$)*. Il existe des lignes de champ partant de $(\varsigma_2)$ (d'une zone électrisée positivement) pour rejoindre $(\varsigma_1)$ (en une zone électrisée négativement)

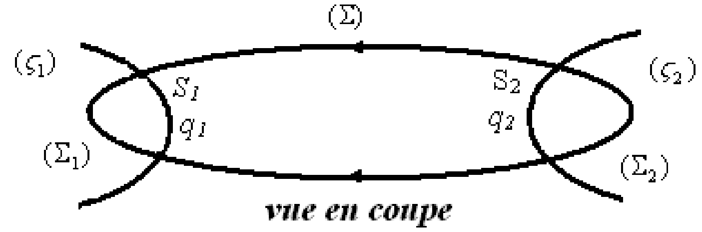



On appel **tube de champ**, l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur une courbe fermée, telle que $(\Gamma_1)$ tracée sur $(\varsigma_1)$ ou $(\Gamma_2)$ tracée sur $(\varsigma_2)$.

Le tube de champ défini ci-dessus intercepte :

- sur $(\varsigma_1)$ une calotte de surface $S_1$, de bord $(\Gamma_1)$ portant la charge $q_1$ ;
- sur $(\varsigma_2)$ une calotte de surface $S_2$, de bord $(\Gamma_2)$ portant la charge $q_2$ ;

Nous cherchons à trouver une relation entre les deux charges $q_1$ et $q_2$, pour ce traçons à l'intérieur de $(\varsigma_1)$ une surface $(\Sigma_1)$ de bord $(\Gamma_1)$ et à l'intérieur de $(\varsigma_2)$ une surface $(\Sigma_2)$ de bord $(\Gamma_2)$. Notons $(\Sigma)$ la surface latérale du tube de champ




Le flux du champ électrique sortant de la région intérieure à $(\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma)$ est :

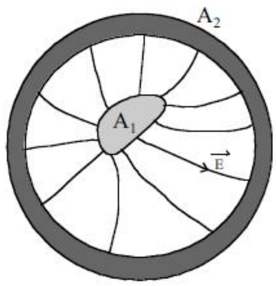
- ✓ $(\dfrac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0})$ selon la loi de Gauss ;
- ✓ Nul par construction ($\vec{E} = \vec{0}$ dans les deux conducteurs et $\vec{E}$ tangent à $(\Sigma)$)

**<u>D'où le théorème :</u>**

*Les Charges des calottes $S_1$* et $S_2$, *dites* ***éléments correspondants****, sont* ***opposées****.*

### VII.3. Influence Totale

On peut créer des conditions d'influence **totale** en plaçant (A1) à l'intérieur de (A2)




A partir du théorème des éléments correspondants on peut facilement démontrer que

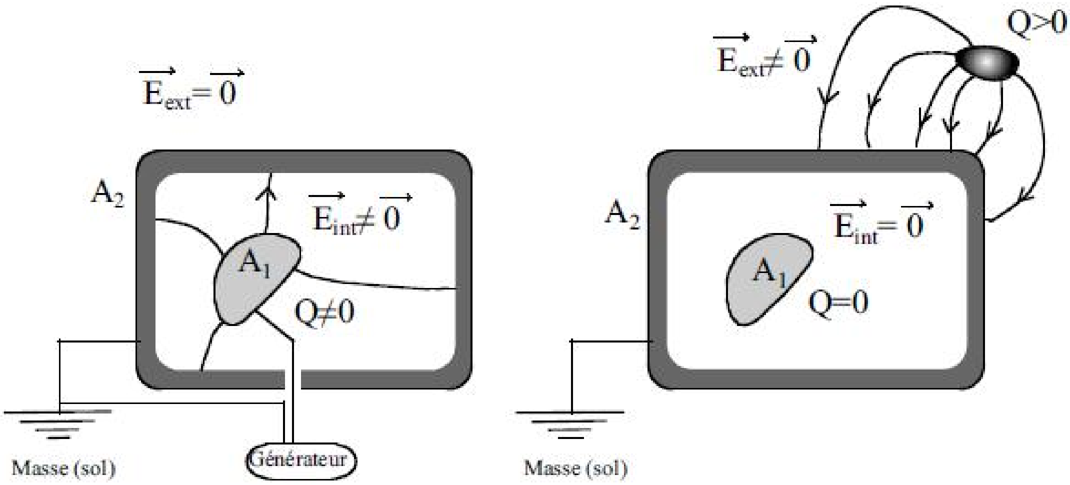
$$Q_{A1} + Q_{A2}^{\text{int}} = 0$$

Où $Q_{A1}$ est la charge du corps (A1) et $Q_{A2}^{\text{int}}$ est la charge de la face intérieure du conducteur (A2).
Cette propriété est connue sous le nom de **théorème de Faraday**

Michael Faraday
1791-1867

***<u>Notion d'écran ou de blindage électrostatique : la cage de Faraday</u>***

Un conducteur à l'équilibre a un champ nul : de ce fait, s'il possède une cavité, celle-ci se trouve automatiquement isolée (du point de vue électrostatique) du monde extérieur. On définit par écran électrostatique parfait tout conducteur creux maintenu à un potentiel constant. Lorsqu'on relie (A2) au sol, on a $Q_2^{ext} = 0$ (les charges s'écoulent vers la Terre ou proviennent de celle-ci). Dans ce cas, le champ électrique mesuré à l'extérieur de (A2) est nul, malgré la présence de (A1) chargé à l'intérieur de (A2). Ainsi, l'espace extérieur à (A2) est protégé de toute influence électrostatique provenant de la cavité. L'inverse est également vrai.




Prenons maintenant le cas où (A1) porte une charge nulle et où (A2) est placé à proximité d'autres conducteurs chargés. A l'équilibre, on aura $Q_2^{\text{int}}=0$ mais un champ électrique non nul mesuré à l'extérieur de (A2), dépendant de la distribution surfacique externe de (A2). Ainsi, malgré la charge portée par la surface extérieure de (A2), la cavité interne possède un champ électrique nul. Nous voyons donc que le champ électrique régnant à l'intérieur de (A2) est parfaitement indépendant de celui à l'extérieur. Noter que ceci reste vrai même si (A2) n'est pas maintenu à potentiel constant.

Une combinaison linéaire de ces deux situations permettant de décrire tous les cas possibles, nous venons de démontrer que tout conducteur creux maintenu à potentiel constant constitue bien un écran électrostatique dans les deux sens. Un tel dispositif est appelé cage de Faraday.

### VII.4. Coefficients d'influence électrostatique

Lorsque plusieurs conducteurs sont mis en présence les uns des autres ils exercent une influence électrostatique réciproque. A l'équilibre les densités surfaciques de chaque conducteur dépendent des charges qu'ils portent, de leur capacité et de leurs positions relatives.

Soit un ensemble de *(n)* conducteurs *($A_i$)* de charge électrique totale $Q_i$ et potentiel $V_i$, en équilibre électrostatique. On peut montrer que :

$$\forall i,\quad Q_i=\sum_j C_{ij}V_j$$

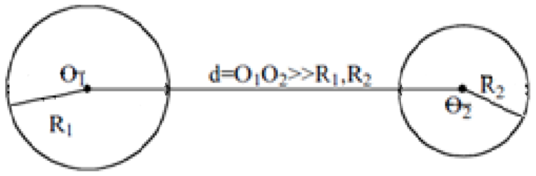
Ou sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ . \\ . \\ Q_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & \ldots & C_{2n} \\ . & & \\ . & & \\ C_{n1} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ . \\ . \\ V_n \end{pmatrix}$$

Les coefficients $\boldsymbol{C_{ij}}$ sont appelés **coefficients d'influence**. Les coefficients $\boldsymbol{C_{ii}}$ sont parfois **appelés coefficients de capacité** ou **capacités des conducteurs en présence des autres.** Il ne faut pas les confondre avec les capacités propres $C_i$ des **conducteurs isolés**, seuls dans l'espace.

**Exemple**

Soient deux conducteurs sphériques, (A1) et (A2), de rayons $R_1$ et $R_2$ portant une charge $Q_1$ et $Q_2$, situés à une distance d l'un de l'autre. A quels potentiels se trouvent ces deux conducteurs ?




En vertu du principe de superposition, le potentiel de (A1), pris en son centre $0_1$ est :

$$V_1(O_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S_1}\frac{\sigma_1 dS_1}{P_1O_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{S_2}\frac{\sigma_2 dS_2}{P_2O_1}$$

Où le premier terme est dû aux charges $Q_1$ et le second à celles situées sur $A_2$. Lorsque la distance d est beaucoup plus grande que les rayons, on peut assimiler $P_2O_1 \approx O_2O_1 = d$ pour tout point $P_2$ de la surface de $A_2$ et l'on obtient :

$$V_1(O_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_d}$$

Où l'on reconnaît en $C_1$ la capacité d'une sphère isolée et en $C_d$ un coefficient qui dépend à la fois de la géométrie des deux conducteurs et de leur distance. En faisant de même pour (A2), on obtient

$$V_2(O_2) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_1}{C_d}$$

Où $C_2$ est la capacité de (A2) isolée. On obtient donc un problème linéaire qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_d} \\ \frac{1}{C_d} & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

c'est à dire $V_i = D_{ij}Q_j$ où la matrice $D_{ij}$ est connue à partir de l'inverse des diverses capacités. Si l'on veut se ramener au problème précédent (calcul des charges connaissant les potentiels), c'est à dire à la résolution de $Q_i = C_{ij}V_j$, où $C_{ij}$ est la matrice des coefficients d'influence, il faut inverser la matrice $D_{ij}$. On obtiendra en effet $Q_i = D_{ij}^{-1}V_j$, ce qui donne $C_{ij} = D_{ij}^{-1}$. Dans le cas présent, on obtient

$$C_{11} = \frac{C_1}{1-\frac{C_1C_2}{C_d^2}} \qquad C_{22} = \frac{C_2}{1-\frac{C_1C_2}{C_d^2}} \qquad C_{12} = C_{21} = -\frac{\frac{C_1C_2}{C_d}}{1-\frac{C_1C_2}{C_d^2}}$$

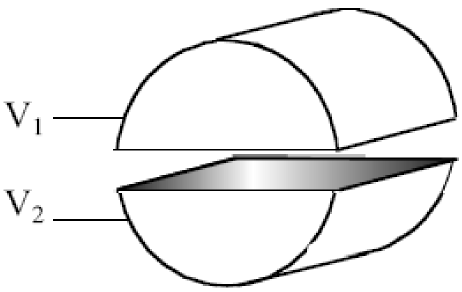
On voit clairement sur cet exemple que :

1. les capacités en présence des autres conducteurs $C_{ii}$ ne sont pas identifiables aux capacités propres $C_i$ des conducteurs isolés dans l'espace

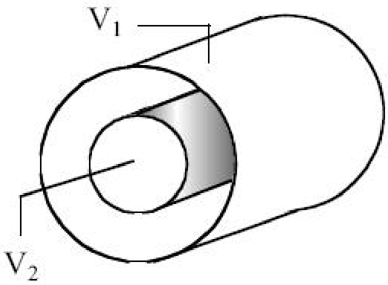
2. les coefficients d'influence $C_{ij}$ sont bien négatifs.

## VIII. Les condensateurs

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs en ***influence***. Ces conducteurs sont appelés **armatures**.
Il y a deux types de condensateurs :




**à armatures rapprochées**




**à influence totale**

### VIII.1. Capacité d'un condensateur

Soient un condensateur formé de deux conducteurs *(A1)* et *(A2)* portant une charge totale $Q_1$ et $Q_2$ et de potentiels $V_1$ et $V_2$. Nous avons alors :

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Les coefficients d'influences $C_{ij}$ ne dépendent que de la géométrie du condensateur pour les déterminer nous allons considérer des cas particuliers simples. Regardons ce qui se passe dans le cas d'un condensateur à influence totale où ***(A2)* est reliée à la masse (** $V_2 = 0$ et $Q_2^{ext} = 0$ car on néglige toute influence extérieure**)**. Alors on obtient

$$\begin{cases} Q_2 = Q_2^{\text{int}} + Q_2^{ext} = Q_2^{\text{int}} = -Q_1 \\ C_{11} = -C_{21} \end{cases}$$

La première relation n'est vraie que si (A2) est à la masse, mais la seconde est générale.
Par ailleurs, on sait que $C_{21} = C_{12}$ (on peut aussi le redémontrer en reliant les deux conducteurs par un fil ($V_1 = V_2$) et choisir $Q_1 = 0$). Par convention, la capacité C du condensateur, sa charge Q et sa tension entre armatures sont alors définies de la façon suivante,

$$C = C_{11}$$
$$U = V_1 - V_2$$
$$Q = Q_1$$

Ce qui fournit la relation des condensateurs

$$Q = C\,U$$

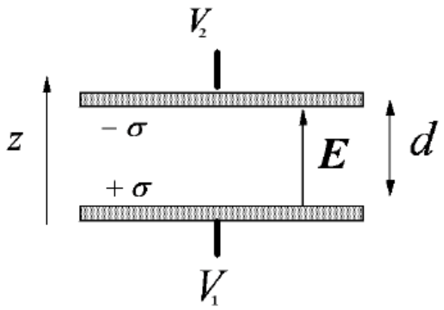
Pour un condensateur à armatures rapprochées, on obtient le même résultat, moyennant une séparation faible (devant leur taille) des conducteurs. Dans ce type de condensateur, les charges $Q_1$ et $Q_2$ correspondent à celles qui se trouvent réparties sur l'ensemble de la surface de chaque conducteur. Mais si la distance est faible, l'influence électrostatique va condenser les charges sur les surfaces en regard, de telle sorte que l'on peut faire l'hypothèse suivante

$$Q_1 = Q_1^{ext} + Q_1^s \approx Q_1^s$$
$$Q_2 = Q_2^{ext} + Q_2^s = Q_2^{ext} - Q_1^s \approx Q_2^{ext} - Q_1$$
ce qui nous ramène à une expression identique à celle d'un condensateur à influence totale.

**Remarques**

1. Pourquoi appelle-t-on ces dispositifs des condensateurs ? Parce qu'ils permettent de mettre en évidence le phénomène de « condensation de l'électricité », à savoir l'accumulation de charges électriques dans une petite zone de l'espace. Ainsi, en construisant des condensateurs de capacité C élevée, on obtient des charges électriques Q élevées avec des tensions U faibles.
2. La charge située sur l'armature (A2) est $Q_2 = Q_2^{ext} - Q$ (pour un condensateur à influence totale) et, en toute rigueur, ne vaut $-Q$ que lorsque (A2) est mise à la masse. En général, elle reste cependant négligeable devant $Q$ dans les cas considérés dans ce cours et on n'en tiendra donc pas compte.

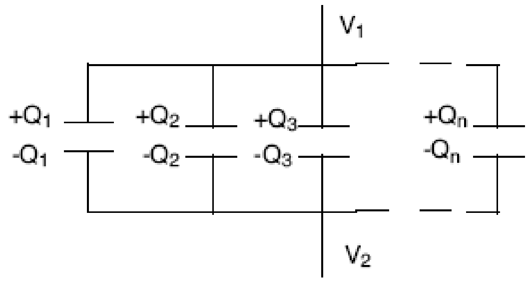
**Exemple :** **Capacité d'un condensateur plan**




$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2.\varepsilon_0}\vec{e}_z + \frac{-\sigma}{2.\varepsilon_0}.(-\vec{e}_z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$$
$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}.d\vec{z} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.d$$
D'où une capacité par unité de surface (S=1)
$$C = \frac{\sigma}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

### VIII.2. Association de condensateur

#### a. Condensateurs en parallèle




Soient **n** condensateurs mis ***en parallèle*** et portés à la même tension
$$U = V_1 - V_2$$

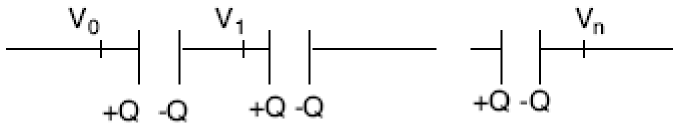
pour chaque condensateur nous avons $Q_i = C_i.U$ alors la charge totale est

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i C_i.U$$

et donc

$$C = \sum_i C_i$$

**b. Condensateurs en série**




Soient **n** condensateurs mis ***en série*** et portés au potentiel $U_i$ pour chaque condensateur nous avons $Q_i = C_i.U_i$ alors la charge totale est

$$U = V_0 - V_n = V_0 - V_1 + V_1 - V_2 + .... + V_{n-1} - V_n =$$
$$\frac{Q}{C_0} + \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + ... + \frac{Q}{C_n} = \sum_i \frac{1}{C_i}.Q$$

et donc

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

## IX. Energie électrostatique

### IX.1. Charge ponctuelle dans un champ électrostatique

Soit une charge ponctuelle *q*, placée en un point $M(\overrightarrow{OM} = \vec{r})$ dans un champ électrostatique $\vec{E}$. Pour un déplacement fini entre A et B la force électrostatique effectue le travail $W = q\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = q(V_A - V_B)$. L'opérateur extérieur exerce la force $\vec{F}_{opé} = -\vec{F}$ donc fournit le travail $W_{opé} = -W = q(V_B - V_A)$. On pose

$$U_p = qV$$

Énergie potentielle d'interaction de la charge dans le champ ; dans ces conditions $W = -\Delta U_p$.

***Remarque :***
Le potentiel électrique est une mesure (à un facteur ***q* près**) de l'énergie électrostatique et l'énergie est **indépendante du chemin suivi**.

### IX.2. Energie d'un système de charges

L'énergie d'un système de charges coïncide avec le travail fourni par l'opérateur extérieur pour réaliser le système :

$$U_p = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i(P_i)$$

Le facteur 1/2 apparaît parce que chaque couple est compté deux fois et

$$V_i(P_i) = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

est le potentiel créé en *Pi* par toutes les charges autres que $q_i$.

Le résultat précédent se transpose aisément au cas des distributions continues : ainsi $U_p = \frac{1}{2}\iint \sigma V ds$ ou $U_p = \frac{1}{2}\iiint \rho V dv$ ceci respectivement pour une distribution surfacique et volumique. *V* est ici le potentiel total en un point où se trouve l'élément de surface ou de volume.

**a. Energie électrostatique d'un conducteur en équilibre**

Soit un conducteur isolé, de charge ***Q*** distribuée sur sa surface ***S***. L'énergie potentielle électrostatique de ce conducteur est alors :

$$U_p = \frac{1}{2}\iint \sigma V ds = \frac{1}{2}V\iint \sigma dS = \frac{1}{2}VQ$$

On peut aussi écrire

$$U_p = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

**b. Energie d'un système de conducteurs**

Pour un conducteur en *équilibre* électrostatique, les charges étant uniquement superficielles, l'expression de l'énergie est de la forme

$$U_p = \frac{1}{2}\sum_i V_i \iint_{S_i} \sigma dS = \frac{1}{2}\sum_i V_i Qi$$

**Exemple : Densité d'énergie pour le condensateur plan**

La capacité d'un condensateur plan étant $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ permet d'écrire l'énergie sous la forme

$$U_p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{d} V^2$$

Si on pose volume = V = *Sd* et *E* = *V*/*d* = champ électrique uniforme entre les armatures, l'expression de l'énergie devient

$$U_p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{V}\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{V} E^2$$

Ainsi tout se passe comme si entre les armatures du condensateur l'énergie électrostatique était répartie avec la densité

$$u = \frac{U_p}{\mathrm{V}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Dans le système SI, cette grandeur s'exprime en *joules par m*$^3$ ($\mathrm{Jm}^{-3}$).